Mô hình xác suất cho dầm bê tông cốt thép ứng suất trước tiết diện chữ T

Probabilistic model for prestressed precast concrete T-beam

Lê Đức Tuấn^{1*}

¹Trường Đại học Công nghệ Sài Gòn, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: tuan.leduc@stu.edu.vn

THÔNG TIN	TÓM TẮT
<p>DOI:10.46223/HCMCOUJS.tech.vi.14.1.447.2019</p> <p>Ngày nhận: 18/02/2019 Ngày nhận lại: 11/03/2019 Duyệt đăng: 10/04/2019</p> <p><i>Từ khóa:</i> bê tông cốt thép ứng suất trước, mô hình xác suất, mô phỏng, Monte Carlo</p> <p><i>Keywords:</i> prestressed precast concrete Monte Carlo, probabilistic model, simulation</p>	<p>Bài báo này trình bày việc tính toán sức kháng uốn theo thời gian của dầm bê tông cốt thép ứng suất trước tiết diện chữ T thông qua việc sử dụng một mô hình xác suất mới được thiết lập. Sự ngẫu nhiên của các thông số đầu vào của mô hình được xem xét với giả định phân phối chuẩn. Khả năng chịu lực của dầm bê tông cốt thép ứng suất trước được nghiên cứu thông qua ví dụ số sử dụng kỹ thuật mô phỏng Monte Carlo. Kết quả cho thấy mô hình đề xuất có đủ độ tin cậy để xác định sức kháng mômen uốn theo thời gian của dầm bê tông cốt thép ứng suất trước tiết diện chữ T.</p> <p>ABSTRACT</p> <p>This article evaluates the calculation of bending resistance to time of a prestressed precast concrete T-beam using a newly built simple probabilistic model. Random input parameters of the model were considered with the assumption of normal distributions. The Monte Carlo simulation technique is used with the presented numerical procedure to investigate the capacity of the prestressed precast T-beam. The results show that the proposed model is a credible evaluation of the calculation of the bending moment resistance of prestressed precast concrete T-beam.</p>

1. Giới thiệu

Ý tưởng về ứng suất trước (UST) hình thành từ nhu cầu ngăn ngừa sự phát triển vết nứt trong giai đoạn đầu của quá trình chịu tải trọng (Nawy, 2009). Ngày nay, kết cấu bê tông cốt thép (BTCT) UST được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực xây dựng. Do vậy, các phương pháp thiết kế kết cấu BTCT UST nhận được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà nghiên cứu. Xu hướng hiện nay là việc sử dụng các mô hình phi tuyến nâng cao trong thiết kế loại kết cấu này (Králik & Klabník, 2016), (Sucharda, Bilek, Smirakova, Kubosek, & Cajka, 2017). Các tiêu

chuẩn thiết kế hiện tại đã tích hợp cả phương pháp tiên định và phương pháp xác suất (European Standard, 2004), (Matthews, Vliet, Walraven, Mancini, & Dieteren, 2016), trong đó phương pháp tiên định thường được sử dụng nhiều hơn do tính đơn giản của nó. Tuy nhiên, các thông số liên quan đến sức kháng uốn của kết cấu BTCT UST đều biến đổi theo thời gian. Cho nên, việc áp dụng các phương pháp thiết kế dựa trên xác suất cho kết cấu BTCT UST rất phổ biến trong những năm gần đây (Marek, Brozzetti, Gustar, & Tikalsky, 2003), (Melchers, 1999), (Stewart & Rosowsky, 1998).

Sức kháng uốn của dầm BTCT UST cũng đã được nghiên cứu mới đây bởi Le T. D. và cộng sự trong (Le, Konecny, & Mateckova, 2018), với mục đích phục vụ cho việc thiết kế các mẫu thí nghiệm dầm BTCT UST tiết diện chữ nhật. Một trong những kết luận của nghiên cứu (Le et al., 2018) là ngay cả dầm BTCT UST tiết diện hình chữ nhật sử dụng bê tông tính năng cao (Aitcin, 1998) cũng không tận dụng được hết khả năng của vật liệu bê tông. Nghiên cứu trong (Le et al., 2018) đã đề nghị rằng nên sử dụng các dầm BTCT tiết diện chữ I hoặc chữ T để tận dụng triệt để khả năng của bê tông tính năng cao.

Sức kháng uốn của dầm BTCT UST có tiết diện chữ T cũng đã được quan tâm và nghiên cứu nhiều, thể hiện qua các bài báo đã đăng tải ở nhiều kỳ trên Tạp chí PCI (Viện Bê tông ứng suất trước) (Seguirant, Brice, & Khaleghi, 2005). Các nghiên cứu này đã phân tích ứng xử dầm BTCT UST bằng phương pháp biến dạng tương hợp.

Mục đích trước tiên của nghiên cứu này là thiết lập một mô hình xác suất cho ứng xử kháng uốn của dầm đơn giản BTCT UST có tiết diện chữ T. Trong đó, ứng xử phụ thuộc thời gian của cường độ chịu nén và mô đun đàn hồi của bê tông sẽ được xem xét. Tính chất ngẫu nhiên của các thông số đầu vào của mô hình sẽ được kể đến thông qua việc sử dụng kỹ thuật mô phỏng Monte Carlo (Anderson, 1999). Hàm mật độ xác suất của cường độ chịu nén, mô đun đàn hồi của bê tông và vị trí của cáp UST trong dầm được giả định có phân bố chuẩn. Hiện tượng chùng ứng suất cũng được xem xét. Sau đó, một chương trình tính toán bằng ngôn ngữ Matlab (www.mathworks.com) được biên soạn dựa trên mô hình đã thiết lập để tính toán sức kháng uốn của dầm BTCT UST đang xem xét.

2. Sự biến đổi theo thời gian của các đặc trưng vật liệu BTCT

Ứng xử của dầm BTCT UST thường bị chi phối bởi 2 đặc trưng vật liệu quan trọng là mô đun đàn hồi và cường độ chịu nén của bê tông. Thông thường, độ lớn của 2 đặc trưng này được xác định theo (European Standard, 2004). Tuy nhiên, dựa vào số liệu thí nghiệm của một mẫu BTCT đúc sẵn có cấp độ bền C50/60 theo Eurocode, (Le et al., 2018) đã dùng đường hồi quy để xấp xỉ các đường cong của 2 đặc trưng này. Kết quả là, sự phụ thuộc thời gian của mô đun đàn hồi và cường độ chịu nén của mẫu BTCT trên được biểu diễn qua 4 công thức sau:

$$E_{c,cyl}(t) = 4.3067 \ln(t) + 23.537 \quad (1)$$

$$f_{c,cyl}(t) = 12.845 \ln(t) + 33.627 \quad (2)$$

$$E_{c,cyl}(t) = \mu(E_{c,cyl}(t)) + cov(E_{c,cube}(28)) \cdot \mu(E_{c,cyl}(t)) \quad (3)$$

$$f_{c,cyl}(t) = \mu(f_{c,cyl}(t)) + cov(f_{c,cube}(28)) \cdot \mu(f_{c,cyl}(t)) \quad (4)$$

Trong đó:

$E_{c,cyl}(t)$: mô đun đàn hồi (GPa) của mẫu BTCT thí nghiệm ở ngày thứ t ;

$f_{c,cyl}(t)$: cường độ chịu nén (MPa) của mẫu BTCT thí nghiệm ở ngày thứ t ;

$\mu(E_{c,cyl}(t))$: giá trị trung bình của mô đun đàn hồi của mẫu hình trụ ở ngày t ;

$\mu(f_{c,cyl}(t))$: giá trị trung bình của cường độ nén của mẫu hình trụ ở ngày t ;

$cov(E_{c,cube}(28))$: hệ số biến đổi của mô đun đàn hồi của mẫu lập phương khi $t = 28$ ngày;

$cov(f_{c,cube}(28))$: hệ số biến đổi của cường độ chịu nén của mẫu lập phương khi $t = 28$ ngày.

Cũng cần lưu ý là công thức (3) và (4) có xét đến đặc tính thống kê của các hàm mật độ xác suất.

3. Mô hình xác suất cho ứng xử kháng uốn của dầm BTCT UST tiết diện chữ T

Trong phạm vi nghiên cứu này, ảnh hưởng của cốt thép thông thường đối với sức kháng uốn của tiết diện dầm không được xét đến.

Nếu chiều cao vùng nén lớn hơn bề dày bản cánh, mômen uốn cực hạn (M_u) của tiết diện chữ T và cáp UST của dầm được xác định:

$$M_u = F_{c1}(d - 0.4x) + F_{c2}(d - 0.5h_f) \quad (5)$$

Trong đó:

F_{c1} : lực nén (kN) trong bê tông do phần bản bụng, $F_{c1} = 0.8f_{c,cyl}b_w x$;

F_{c2} : lực nén (kN) trong bê tông do phần bản cánh, $F_{c2} = 0.8f_{c,cyl}(b - b_w)h_f$;

d : chiều cao hữu hiệu (m) của tiết diện dầm đang xét;

x : chiều cao vùng nén (m), được tính theo phương pháp biến dạng giới hạn (tương hợp về biến dạng), bằng công thức sau:

$$x = \frac{F_{sp} - F_{c2}}{0.8f_{c,cyl}b_w} \quad (6)$$

Trong đó:

b_w : bề dày (m) bản bụng dầm chữ T;

b : bề rộng (m) bản cánh dầm chữ T;

h_f : bề dày (m) bản cánh dầm chữ T;

$f_{c,cyl}$: cường độ nén hình trụ (kPa) của bê tông;

F_{sp} : tổng lực UST (kN) trong tất cả các lớp cáp sau khi mất mát do chùng ứng suất, được xác định bởi:

$$F_{sp} = \sum N_{xi} A_p \sigma_{pst} \quad (7)$$

Trong đó:

N_{xi} : số cáp theo phương ngang trong lớp thứ i ;

A_p : diện tích tiết diện ngang (m^2) của cáp UST;

σ_{pst} : ứng suất trước (kPa) sau mất mát do chùng ứng suất, được tính như sau:

$$\sigma_{pst} = \sigma_{pmax} \quad \text{nếu } t < 72 \text{ giờ} \quad (8a)$$

$$\sigma_{pst} = \sigma_{pmax} \times 0.85 \quad \text{nếu } 72 \text{ giờ} \leq t < 500,000 \text{ giờ} \quad (8b)$$

$$\sigma_{pst} = \sigma_{pmax} \times 0.7225 \quad \text{nếu } t \geq 500,000 \text{ giờ} \quad (8c)$$

với p_{max} là ứng suất trước (kPa) lớn nhất trong cáp.

Nếu chiều cao vùng nén nhỏ hơn bề dày bản cánh, tiết diện ứng xử như là tiết diện chữ nhật. Do đó, mômen uốn cực hạn (M_u) của tiết diện được tính theo công thức:

$$M_u = F_c (d - 0.4x) \quad (9)$$

Trong đó:

F_c : lực nén (kN) trong bê tông, calculated as, $F_c = 0.8f_{c,cyl}bx$;

x : chiều cao vùng nén (m), $x = \frac{F_{sp}}{0.8f_{c,cyl}b}$.

Như đã đề cập ở phần trên, kỹ thuật mô phỏng Monte Carlo được sử dụng để có được các kết quả số thông qua quá trình tạo mẫu. Kỹ thuật này bao gồm 3 bước chính: tạo mẫu, chạy mô hình và phân tích dữ liệu. Theo (Fegan & Gustar, 2003), sự phân bố của các biến ngẫu nhiên có thể được biểu diễn theo công thức (10) sau đây. Nếu xét đến sự phụ thuộc thời gian của các biến ngẫu nhiên thì công thức (10) được viết lại thành công thức (11).

$$N(\mu, \sigma) = \mu + \sigma \times N(0,1) \quad (10)$$

$$N(\mu, \sigma, t) = \mu(t) + \sigma(t) \times N(0,1) \quad (11)$$

Trong đó:

μ : giá trị trung bình;

σ : độ lệch chuẩn;

$N(0,1)$: các số ngẫu nhiên của phân phối chuẩn được chuẩn hóa;

$N(\mu, \sigma)$: các số ngẫu nhiên tạo ra từ phân phối chuẩn;

$N(\mu, \sigma, t)$: phân phối chuẩn phụ thuộc thời gian tạo ra từ phân phối chuẩn chuẩn hóa tại thời gian t ;

$\mu(t)$: giá trị trung bình phụ thuộc thời gian tại t ;

$\sigma(t)$: độ lệch chuẩn phụ thuộc thời gian tại t .

4. Sức kháng uốn của dầm BTCT UST tiết diện chữ T

Dựa trên mô hình xác suất đơn giản đã thiết lập ở phần 3, một chương trình tính toán sức kháng uốn của dầm BTCT UST tiết diện chữ T đã được viết bằng ngôn ngữ Matlab. Chương trình này sau đó được dùng để tính toán sức kháng uốn của dầm đơn giản BTCT UST tiết diện chữ T có bề rộng cánh là 1.0m và chiều cao 0.61m như minh họa trên Hình 1.

Hình 1. Minh họa mặt cắt tiết diện ngang của dầm đang xét

Chiều dài của dầm là 7m. Cáp UST ở phần trên của tiết diện và cốt thép thông thường không được xem xét trong ví dụ này. Có 3 lớp cáp UST ở phần dưới tiết diện, mỗi lớp gồm 4 sợi cáp với diện tích tiết diện ngang mỗi sợi là $A_p = 150 \times 10^{-6} \text{m}^2$. Khoảng cách theo phương đứng giữa 2 lớp cáp là 0.05m. Giả sử lớp bê tông bảo vệ dày 0.08m.

Để đánh giá độ tin cậy của mô hình đã thiết lập, ví dụ tính toán trong phần này sẽ được giải bởi cả 2 phương pháp: tiên định và xác suất.

Ngoài ra, chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện giữa dầm cũng được khảo sát theo cả hai phương pháp đã nêu.

4.1. Lời giải tiên định

Các kích thước hình học khác của tiết diện là: $h_f = 0.21 \text{m}$, $b_w = 0.34 \text{m}$, $d = 0.57 \text{m}$ (chiều cao hữu hiệu của tiết diện). Từ đó, ta xác định được diện tích tiết diện ngang $A = 0.3460 \text{m}^2$ và mô men quán tính của tiết diện $I = 0.0103 \text{m}^4$.

Các thông số của vật liệu BTCT: $= 2390 \text{kg/m}^3$, $E_c = 26.522 \text{kPa}$, $f_{c,cyl} = 42.531 \text{kPa}$.

Các thông số của vật liệu cáp UST: $f_{p01} = 1687 \times 10^3 \text{kPa}$, $\sigma_{pmax} = 1400 \times 10^3 \text{kPa}$.

Biến dạng lớn nhất tại thớ nén ở trạng thái giới hạn về cường độ (BS8110 và Eurocode 2), $\epsilon_{cu} = 0.0035$.

Biến dạng giới hạn của thép ở trạng thái giới hạn cực hạn (Eurocode 4), $\epsilon_{ud} = 0.02$.

Kết quả tính toán sức kháng uốn của tiết diện dầm tại 3 thời điểm khác nhau được thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1

Sức kháng uốn của tiết diện theo lời giải tiền định

Thời điểm	$t < 72$ giờ ($t = 2$ ngày)	$72 \text{ giờ} \leq t < 500.000$ giờ ($t = 14$ ngày)	$t \geq 500.000$ giờ ($t = 28$ ngày)
Sức kháng uốn, M_u (kNm)	1361.7	1187.0	1190.9

Nguồn: Kết quả phân tích dữ liệu của nhóm nghiên cứu

4.2. Lời giải xác suất

Các thông số đầu vào cho bài toán xác suất được tổng hợp trong Bảng 2. Phương trình (10) được sử dụng để xây dựng các biểu đồ tần số cho mô đun đàn hồi và cường độ nén của bê tông cũng như chiều cao hữu hiệu của tiết diện đang xét.

Sức kháng uốn cực hạn của tiết diện dầm được tính theo công thức (5) hoặc (9) tùy vào chiều cao vùng nén như đã trình bày ở phần 3. Do bỏ qua ảnh hưởng của cốt thép thông thường nên sức kháng uốn của tiết diện chỉ do sự đóng góp bởi bê tông và cáp UST. Kết quả của lời giải xác suất được trình bày ở Bảng 3 với cả giá trị trung bình và các giá trị cận biên 5% và 95%. Biểu đồ phân phối mômen uốn cực hạn của tiết diện khi bê tông đạt 28 ngày tuổi được thể hiện trên Hình 2. Biểu đồ này cho thấy mômen uốn cực hạn của tiết diện dầm BTCT UST tiết diện chữ T có phân phối tương tự phân phối chuẩn.

Từ Bảng 2 và Bảng 3, ta thấy rằng giá trị sức kháng uốn cực hạn trung bình của lời giải xác suất và giá trị sức kháng uốn cực hạn của lời giải tiền định tại các mốc thời gian 2, 14 và 28 ngày đều gần như bằng nhau. Điều đó chứng tỏ rằng mô hình đơn giản đã thiết lập có đủ độ tin cậy để áp dụng vào việc phân tích ứng xử uốn của dầm BTCT UST tiết diện chữ T.

Để thấy rõ hơn sự biến đổi của sức kháng mômen uốn của dầm BTCT UST theo thời gian, kết quả của lời giải tiền định và xác suất được thể hiện trực quan trên Hình 3.

Hình 2. Phân phối sức kháng mômen uốn của tiết diện dầm khi bê tông đạt 28 ngày tuổi, μ (kNm)

Bảng 2

Các thông số đầu vào cho bài toán xác suất

Thông số	Ký hiệu	Giá trị trung bình	Hệ số biến đổi	Công thức chuyển đổi
Mô đun đàn hồi của bê tông (kPa)	$E_{c,cyl}(t)$	$E_{cm}(t)$	0.0388	$\mu(E_{c,cyl}(t)) + 0.0388 \times N(0,1)$
Cường độ nén của bê tông (kPa)	$f_{c,cyl}(t)$	$f_{cm}(t)$	0.0388	$\mu(f_{c,cyl}(t)) + 0.0388 \times N(0,1)$
Chiều cao hữu hiệu của tiết diện dầm (m)	d	0.57	0.0096	$d = 0.57 + 0.005 \times N(0,1)$
Bề dày bản bụng (m)	b_w	0.34	-	-
Bề dày bản cánh (m)	h_f	0.21	-	-
Nhịp dầm (m)	l	6.85	-	-
Bề rộng bản cánh (m)	b	1.0	-	-
Chiều cao tiết diện dầm (m)	h	0.61	-	-
Bề dày lớp bê tông bảo vệ (m)	c	0.08	-	-

Nguồn: Kết quả phân tích dữ liệu của nhóm nghiên cứu

Bảng 3

Sức kháng uốn của tiết diện theo lời giải xác suất

Tuổi của bê tông (ngày)	Sức kháng uốn cực hạn của tiết diện dầm (kNm)			
	M_{u05} (5%)	M_{u50} (50%)	M_{u95} (95%)	Giá trị trung bình
2	1340.4	1361.4	1382.5	1361.4
14	1169.4	1186.9	1204.4	1186.9
28	1173.2	1190.8	1208.5	1190.8

Nguồn: Kết quả phân tích dữ liệu của nhóm nghiên cứu

Hình 3 cho thấy sức kháng uốn của tiết diện dầm giảm nhanh ở 2 tuần đầu tiên sau khi đổ bê tông trước khi tăng chậm trở lại từ tuần thứ 3. Xu hướng giảm ở 2 tuần đầu tiên này rõ ràng là trái ngược với kết quả nghiên cứu trong (Le et al., 2018). Sự trái ngược này là do sự mất mát do chùng ứng suất đã không được xét đến trong nghiên cứu (Le et al., 2018). Bên cạnh đó, chúng ta cũng có thể quan sát rõ từ Hình 3 rằng sự biến đổi của sức kháng uốn của tiết diện dầm là không đáng kể, chỉ tăng/giảm trong khoảng 1.5%.

Hình 3. Sức kháng uốn của tiết diện dầm BTCT UST theo thời gian

Kết quả tính toán chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện giữa dầm theo 2 phương pháp được tổng hợp và so sánh như trình bày trong Bảng 4. Có thể thấy rõ từ Bảng 4 rằng chuyển vị thẳng đứng tại vị trí giữa dầm theo lời giải tiền định luôn lớn hơn giá trị lớn nhất của chuyển vị thẳng đứng tại vị trí giữa dầm mô phỏng theo phương pháp xác suất ở cả ba thời điểm khảo sát. Tuy nhiên, sự khác nhau về các giá trị chuyển vị thẳng đứng giữa dầm tính toán theo hai phương pháp là khá nhỏ. Điều này củng cố thêm độ tin cậy của mô hình xác suất xây dựng trong nghiên cứu này. Cũng có thể nhận thấy từ Bảng 4 rằng chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện giữa dầm xác định theo cả hai phương pháp đều nằm trong giới hạn cho phép ($2\text{cm} = 1/350$ chiều dài dầm) theo quy phạm hiện hành.

Bảng 4

Chuyển vị thẳng đứng giữa dầm theo lời giải xác suất và lời giải tiền định

Tuổi của bê tông (ngày)	Chuyển vị thẳng đứng (m) tại mặt cắt ngang giữa dầm	
	Lời giải xác suất (giá trị lớn nhất)	Lời giải tiền định
2	0.017	0.019
14	0.011	0.014
28	0.010	0.013

Nguồn: Kết quả phân tích dữ liệu của nhóm nghiên cứu

5. Kết luận

Một mô hình xác suất cơ bản cho ứng xử kháng uốn của dầm đơn giản BTCT UST có tiết diện chữ T đã được thiết lập trên cơ sở xem xét tính chất ngẫu nhiên của các thông số đầu vào như đặc trưng vật liệu và vị trí cáp UST trong tiết diện. Phân bố Gaussian được áp dụng cho hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên đầu vào và kỹ thuật mô phỏng Monte Carlo được sử dụng trong quá trình mô phỏng. Mô hình này sau đó đã được dùng để tính toán sức kháng uốn của tiết diện chữ T và chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện giữa dầm của dầm BTCT UST có kể đến hiện tượng chùng ứng suất. Các kết quả tính toán đã được so sánh với lời giải tiền định. Nghiên cứu cho thấy rằng mô hình xác suất cơ bản đã thiết lập đủ tin cậy để dùng cho việc phân tích ứng xử kháng uốn của dầm đơn giản BTCT UST. Nghiên cứu này có thể tiếp tục phát triển với việc xét đến ảnh hưởng của cốt thép thông thường và cáp UST ở phần phía trên của tiết diện cũng như vết nứt trong dầm.

Tài liệu tham khảo

- Aitcin, P. C. (1998). *High performance concrete*. London, UK: Taylor & Francis.
- Anderson, E. C. (1999). *Monte Carlo methods and importance sampling*. Retrieved January 10, 2019, from <https://www.coursehero.com/file/20910780/MC-lecture-notes/>
- European Standard. (2004). *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Retrieved January 11, 2019, from <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1992.1.1.2004.pdf>
- Fegan, G., & Gustar, M. (2003). Monte Carlo simulation. In P. Marek, J. Brozzetti, M. Gustar, & P. Tikalsky (Eds.), *Probabilistic assessment of structures using Monte Carlo simulation - Background, exercises and software, TeReCo* (2nd ed.), (pp. 25-79). Praha, Czech Republic: Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of Czech Republic.
- Králik, J., & Klabník, M. (2016). Nonlinear analysis of the failure of nuclear hermetic reinforced concrete structure due to extreme pressure and temperature. *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava Civil Engineering Series*, 16(2), Article 17.

- Le, T. D., Konecny, P., & Mateckova, P. (2018). Time dependent variation of carrying capacity of prestressed precast beam. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 143(2018), Article 012013.doi:10.1088/1755-1315/143/1/012013.
- Marek, P., Brozzetti, J., Gustar, M., & Tikalsky, P. (2003). *Probabilistic assessment of structures using Monte Carlo simulation - Background, exercises and software, TeReCo* (2nd ed.). Praha, Czech Republic: Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of Czech Republic.
- MatLab. (n.d.). *The language of technical computing MathWorks*. Retrieved January 12, 2019, from <http://www.mathworks.com>
- Matthews, S., Vliet, A. B., Walraven, J., Mancini, G., & Dieteren, G. (2016). Fib model code 2020 - A new development in structural codes: Towards a general code for both new and existing concrete structures. In H. Beushausen (Ed.), *Proceedings fib Symposium, performance-based approaches for concrete structures* (pp. 22-31). Cape Town, South Africa: Wiley.
- Melchers, R. (1999). *Structural reliability analysis and prediction (Civil engineering)*. West Sussex, UK: Wiley.
- Nawy, E. G. (2009). *Prestressed concrete - A fundamental approach* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Seguirant, S. J., Brice, R., & Khaleghi, B. (2005). Flexural strength of reinforced and prestressed concrete T-beams. *PCI Journal*, 50(1), 44-73.
- Stewart, M. G., & Rosowsky, D. V. (1998). Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks. *Structural Safety*, 20(1), 91-109.
- Sucharda, O., Bilek, V., Smirakova, M., Kubosek, J., & Cajka, R. (2017). Comparative evaluation of mechanical properties of fibre-reinforced concrete and approach to modelling of bearing capacity ground slab. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 61(4), 972-986.