

# Phân tích thích nghi tải ứng suất phẳng sử dụng công thức động học giản yếu

## Shakedown analysis of plane stress plate using reduced kinematic formulation

Trần Trung Dũng<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Mở Thành phố Hồ Chí Minh, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

\*Tác giả liên hệ, Email: dung.ttrung@ou.edu.vn

THÔNG TIN	TÓM TẮT
<p><b>DOI:</b>10.46223/HCMCOUJS proc.vi.17.2.2499.2022</p> <p>Ngày nhận: 29/09/2022 Ngày nhận lại: 09/10/2022 Duyệt đăng: 11/10/2022</p> <p><i>Từ khóa:</i> công thức động học giản yếu; phân tích thích nghi; phần tử tron cạnh</p> <p><i>Keywords:</i> reduced kinematic formulation; shakedown analysis; ES-FEM</p>	<p>Trong bài báo này trình bày thuật giải cho bài toán phân tích kết cấu tải ứng suất phẳng sử dụng công thức động học giản yếu. Phần tử tron trên cạnh (ES-FEM) kết hợp với tối ưu nón bậc 2 sẽ được sử dụng trong thuật giải kết hợp công thức thích nghi động học giản yếu này. Nghiên cứu cho thấy trong phương pháp đề xuất, mặc dù tính chính xác tăng lên đáng kể nhưng số biến của bài toán tối ưu không tăng nhiều, đảm bảo tính hiệu quả về chi phí tính toán.</p> <p><b>ABSTRACT</b></p> <p>In this paper, a solution strategy for a kinematic shakedown analysis formulation of plane stress plate has been described. ES-FEM used in combination with second-order cone programming in the framework of the reduced shakedown kinematic formulation. Results in comparative advantages that are the size of optimization problem is reduced and that accurate solutions can be obtained with minimal computational effort.</p>

### 1. Giới thiệu

Phân tích thích nghi là xác định hệ số tải trọng giới hạn để tránh cho kết cấu không bị phá hủy hoặc hư hỏng do biến dạng dẻo tăng dần (incremental collapse), và biến dạng dẻo đổi chiều lặp lại (alternating plasticity) khi chịu tải trọng lặp thay đổi. Việc phân tích các kết cấu đến trạng thái thích nghi là một quá trình phức tạp do phải tiến hành từng bước với những gia tăng nhỏ của tải trọng (step-by-step method). Một hướng tính toán khác dựa trên lý thuyết phân tích trực tiếp tải trọng thích nghi (shakedown analysis), khi đó tải trọng thích nghi của kết cấu có thể xác định một cách trực tiếp, không cần thông qua các giai đoạn phân tích trung gian như trong phương pháp từng bước (step-by-step method). Trong hướng tính toán này, dựa trên các tiêu chuẩn chảy dẻo của vật liệu (tiêu chuẩn von Mises, Mohr-Coulomb, ...) kết hợp với các định lý cơ bản về cận trên hoặc cận dưới và các phương pháp số (như phần tử hữu hạn, không lưới, đẳng hình học, ...), việc xác định tải trọng giới hạn có thể được thiết lập với dạng tối ưu toán học. Phân tích thích nghi đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước nghiên cứu, mục đích chủ yếu là để tăng tính hiệu quả về độ chính xác và giảm chi phí tính toán. Các hướng nghiên cứu tập trung nhiều vào các lý thuyết chảy dẻo, kỹ thuật tối ưu toán học và ứng dụng các phương pháp số.

Đối với bài toán phân tích thích nghi của kết cấu, công thức thích nghi động học hợp nhất của König (1987) được phát triển dựa trên các định lý của Koiter (1960) thường được sử dụng

rộng rãi. Tuy nhiên công thức này không xác định được dạng phá hoại của kết cấu để có hướng xử lý phù hợp. Bên cạnh đó, công thức thích nghi động học giản yếu được đề xuất (Pham, 1992, 2003; Pham & Stumpf, 1994) có thể xác định được hai dạng phá hoại của kết cấu (phá hủy do biến dạng dẻo tăng dần, và phá hủy do biến dạng dẻo giới hạn lặp lại – gồm biến dạng dẻo đổi chiều hay biến dạng dẻo quay lặp lại). Một vài nghiên cứu ứng dụng công thức này đã được công bố tuy nhiên số lượng rất hạn chế (Tran, Le, Pham, & Nguyen, 2014).

Về phương pháp số, mặc dù phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) với phần tử bậc thấp vẫn được xem là phương pháp tính toán và mô phỏng số hiệu quả và rộng rãi nhất trong tính toán kỹ thuật. Tuy nhiên, phần tử này vẫn còn tồn tại những hạn chế liên quan đến kỹ thuật phần tử khi giải quyết các bài phân tích thích nghi. Điều đó đã ảnh hưởng đáng kể đến độ chính xác của phương pháp số thông dụng này. Gần đây, phương pháp phần tử hữu hạn trơn (SFEM - Smoothed Finite Element Method) do Gui Rong Liu đề xuất, dựa trên kết hợp kỹ thuật mềm hóa biến dạng vào phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống đã ứng dụng giải quyết khá hiệu quả nhiều bài toán kỹ thuật (Liu & ctg., 2007a, 2007b, 2009, 2010). Đối với lớp bài toán phân tích giới hạn và thích nghi, phương pháp PTHH trơn kết hợp với lý thuyết cận cũng đã được nghiên cứu bởi Tran, Liu, Nguyen, và Nguyen (2010), Nguyen và cộng sự (2012) và Le (2017) đã cho thấy sự hiệu quả của phương pháp này. Bên cạnh đó, hiện nay thuật toán tối ưu nón bậc hai đã được Andersen, Christiansen, Conn, và Overton (2000) phát triển cũng đã cho thấy sự thuận lợi trong phân tích bài toán thích nghi. Ngoài ra, do phần lớn các tiêu chuẩn chảy dẻo đều có thể chuyển về dạng hình nón bậc hai.

Tiếp theo hướng nghiên cứu này, phương pháp phần tử hữu hạn trơn sẽ được kết hợp với công thức thích nghi động học giản yếu và tối ưu nón bậc 2 để giải quyết bài toán phân tích thích nghi của kết cấu chịu tải trọng lặp. Trong bài báo này, SFEM với hướng tiếp cận dựa trên cạnh (ES-FEM) sẽ được sử dụng để đánh giá tính hiệu quả của phương pháp đề xuất.

## 2. Công thức thích nghi động học giản yếu

Từ lý thuyết thích nghi động học của Koiter, Pham (1992) và Pham và Stumpf (1994) đã đề xuất công thức thích nghi động học giản yếu đơn giản hơn

$$k_s \leq k_{sr} = \min \bar{I}, \bar{A} \quad (1)$$

trong đó

$$\bar{I} = \inf_{\sigma^e \in L; \varepsilon^p \in C} \frac{\int_V D \varepsilon^p dV}{\int_V \max_{t_x} [\sigma^e \mathbf{x}, t_x : \varepsilon^p \mathbf{x}] dV} \quad (2)$$

$$\bar{A} = \inf_{\mathbf{x} \in V; \sigma^e \in L; \hat{\varepsilon}^p; t_1, t_2} \frac{2D \hat{\varepsilon}^p}{[\sigma^e \mathbf{x}, t_1 - \sigma^e \mathbf{x}, t_2] : \hat{\varepsilon}^p \mathbf{x}} \quad (3)$$

với  $\bar{I}, \bar{A}$  lần lượt là dạng phá hoại biến dạng dẻo tăng dần và dạng phá hoại biến đổi chiều lặp lại. Trong dạng phá hoại biến dạng dẻo tăng dần, trường biến dạng dẻo động học  $\varepsilon^p$  phải tương thích trên toàn miền  $V$ , trong khi đối với dạng phá hoại biến đổi chiều lặp lại thì không cần điều kiện này. Pham và Stumpf (1994) đã chứng minh rằng trong hầu hết trường hợp  $k_s = k_{sr}$ , chưa có trường hợp nào cho thấy  $k_s < k_{sr}$ .

### 3. Công thức thích nghi động học giản yếu rời rạc dựa trên phần tử trơn cạnh

Dạng phá hoại biến dạng dẻo tăng dần  $\bar{I}$  ở công thức (2) có thể được viết lại dưới dạng chuẩn hóa sau:

$$\begin{aligned} \bar{I} = \inf_{\boldsymbol{\sigma}^e \in \mathcal{L}; \boldsymbol{\varepsilon}^p \in \mathcal{C}} \int_V D \boldsymbol{\varepsilon}^p dV \\ \text{s.t.} \int_V \max_{0 \leq t \leq T} \boldsymbol{\sigma}^e \mathbf{x}, t : \boldsymbol{\varepsilon}^p \mathbf{x} dV = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Sử dụng phương pháp rời rạc trên cạnh ES-FEM và tích phân Gauss ta được

$$\begin{aligned} \bar{I} = \min \sum_{i=1}^{N_{ed}} \sigma_Y A_i \sqrt{\mathbf{B}_i \mathbf{d}_i^T \Theta \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i} \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_{ed}} \xi_i \max_{k=1, \dots, M} \boldsymbol{\sigma}_{ik}^e \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i = 1, \\ \mathbf{d}_i = 0 \end{cases} \quad \text{on } \partial V_u, \end{aligned} \quad (5)$$

Trong đó,  $A_i$  là diện tích miền trơn trên cạnh thứ  $i$  và  $N_{ed}$  là tổng số cạnh. Bài toán (5) là vấn đề khó khi liên quan đến việc xác định điều kiện công ngoại cực đại tại mỗi điểm trên toàn miền tải trọng với  $M$  đỉnh tải khi biến  $\mathbf{d}_i$  chưa biết. Để giải quyết vấn đề này, trong bài báo này đề xuất thay vì giải trực tiếp (5), các trường tốc độ chuyển vị ảo  $\mathbf{d}_{ik}$  ( $k = 1, \dots, M$  là tổng số đỉnh tải) được xác định từ bài toán phân tích giới hạn dẻo (plastic limit) sẽ được sử dụng. Trong đó  $\mathbf{d}_{ik}$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} k_{pk} = \min \sum_{i=1}^{N_{ed}} \sigma_Y A_i t_i \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_{ed}} A_i \boldsymbol{\sigma}_{ik}^e \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik} = 1, \\ \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \\ \|\boldsymbol{\rho} \mathbf{d}_{ik}\| \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_{ed}, \end{cases} \quad \text{on } \partial V_u, \end{aligned} \quad (6)$$

và sau đó ta có thể tìm được giá trị trên gần đúng  $\bar{I}'$  theo công thức sau:

$$\bar{I} \leq \bar{I}' = \min_{k=1, \dots, M} \frac{\sum_{i=1}^{N_{ed}} \sigma_Y A_i \sqrt{\tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik}^T \Theta \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik}}}{\sum_{i=1}^{N_{ed}} A_i \max_{m=1, \dots, M} \boldsymbol{\sigma}_{im}^e \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik}}, \quad (7)$$

Trong đó, vấn đề (7) ở trên có thể được biến đổi về dạng nón bậc 2 như sau:

$$\begin{aligned} k_{pk} = \min \sum_{i=1}^{N_{ed}} \sigma_Y A_i t_i \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_{ed}} A_i \boldsymbol{\sigma}_{ik}^e \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik} = 1, \\ \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \\ \|\boldsymbol{\rho} \mathbf{d}_{ik}\| \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_{ed}, \end{cases} \quad \text{on } \partial V_u, \end{aligned} \quad (8)$$

ở đó

$$\mathbf{p} \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d}_{ik} \tag{9}$$

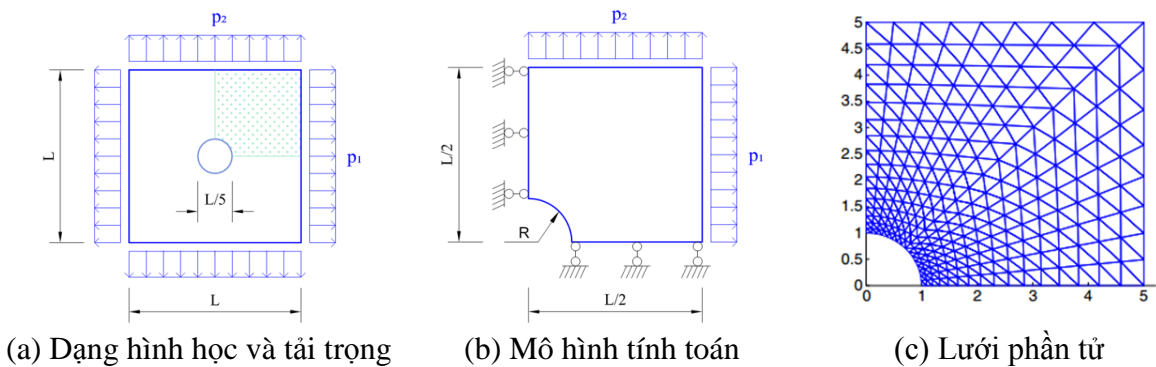
Vấn đề (9) là dạng tối ưu nón bậc 2 chuẩn với các điều kiện nón, phương trình và bất phương trình có thể được giải quyết một cách hiệu quả bằng phần mềm thương mại Mosek. Ngoài ra bậc tự do trong bài toán (9) nhỏ hơn  $M$  (là số đỉnh tải) lần so với bài toán được phát biểu theo Koiter.

**4. Ví dụ số**

Trong nội dung này, mô hình tính toán theo thích nghi động học giản yếu sẽ được thực hiện trên các bài toán biến dạng phẳng và so sánh với các kết quả đã được công bố trước đây. Với tiêu chuẩn von Mises được sử dụng, công thức biểu diễn dạng phá hoại biến đổi chiều lặp lại (3) có thể được giải quyết bằng công thức sau:

$$\bar{A} = \min_{i=1, \dots, N_{ed}} \min_{1 \leq k \neq j \leq N} \sqrt{\frac{2\sigma_Y}{\left[ \sigma_{11}^{eik} - \sigma_{11}^{eij} \right]^2 + \left[ \sigma_{22}^{eik} - \sigma_{22}^{eij} \right]^2 - \dots \left[ \sigma_{11}^{eik} - \sigma_{11}^{eij} \right] \left[ \sigma_{22}^{eik} - \sigma_{22}^{eij} \right]^2 + 3 \left[ \sigma_{12}^{eik} - \sigma_{12}^{eij} \right]^2}}, \tag{10}$$

**4.1. Bài toán tấm mỏng hình vuông chịu kéo**



**Hình 1.** Tấm khoét lỗ chịu kéo

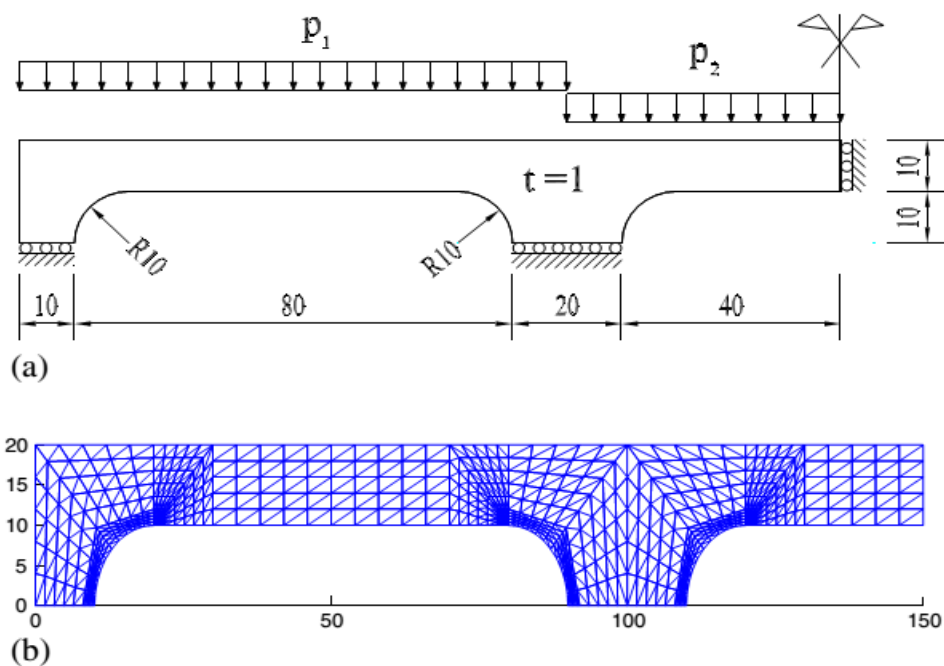
Đầu tiên, ta khảo sát bài toán tấm mỏng hình vuông khoét lỗ hình tròn ở tâm tấm và chịu kéo trong mặt phẳng theo hai phương như Hình 1(a). Bài toán được khảo sát với mô đun đàn hồi của vật liệu  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ , hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ , ứng suất chảy dẻo của vật liệu  $\sigma_Y = 200 \text{ MPa}$ , miền tải trọng thay đổi như sau:  $0 \leq p_1 \leq \sigma_Y, 0 \leq p_2 \leq \sigma_Y$ . Do tính chất đối xứng về mặt hình học nên chỉ cần mô hình 1/4 góc trên bên phải của tấm, xem Hình 1(b), miền tính toán và hệ lưới được minh họa trên Hình 1(c).

Bài toán này đã được khảo sát rất rộng rãi với nhiều phương pháp xấp xỉ khác nhau, các kết quả số có thể tìm thấy trong rất nhiều công bố trước đây (Belytschko, 1972; Groß-Weege, 1997; Garcea, Armentano, Petrolo, & Casciaro, 2005; Ho & Le, 2020; Nguyen & ctg., 2012). Bảng 1 trình bày kết quả của bài toán phân tích thích nghi tương ứng với các trường hợp tải trọng khác nhau. Từ kết quả cho thấy sự phù hợp của phương pháp được sử dụng so với các phương pháp khác chứng tỏ sự chính xác và độ tin cậy của phương pháp đề xuất. Ngoài ra, từ bảng kết quả ta có thể thấy được dạng phá hoại trong cả 03 trường hợp tải đều là dạng phá hoại do biến đổi chiều lặp lại.

**Bảng 1**

Nghiệm phân tích thích nghi tấm khoét lỗ chịu kéo: so sánh với các nghiên cứu khác

Tác giả và phương pháp		Trường hợp tải		
		(a) $p_1 = p_2$	(b) $p_1 = 2p_2$	(c) $p_2 = 0$
Belytschko (1972), equilibrium FE (LB)		0.431	0.501	0.571
Groß-Weege (1997), reduced basis technique (LB)		0.446	0.524	0.614
Garcea và cộng sự (2005), iterative method		0.438	0.508	0.604
Nguyen và cộng sự (2012), NS-FEM Dual		0.439	0.508	0.601
Ho & Le (2020), iRBF 2D		0.478	0.551	0.650
ES-FEM Reduced SOCP	Alternating collapse	0.443	0.513	0.610
	Incremental collapse	0.805	0.805	0.805

**4.2. Bài toán dầm liên tục đối xứng**

**Hình 2.** Dầm liên tục chịu tải trọng độc lập: (a) Dạng hình học và tải trọng

(b) Rời rạc lưới sử dụng 1200 phần tử tam giác

Xét một dầm liên tục đối xứng chịu hai tải trọng độc lập  $p_1$  và  $p_2$ , các kích thước, điều kiện biên và lưới nút được thể hiện trong Hình 2. Miền tải trọng được giả định:  $0.0 \leq p_1 \leq 2.0$  và  $0.0 \leq p_2 \leq 1.0$ . Các thông số vật liệu được giả sử như sau:  $E = 1.8 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_p = 100 \text{MPa}$ . Bảng 2 trình bày hệ số tải trọng thích nghi của bài toán so sánh với kết quả của các nghiên cứu trước đây. Ta thấy sự phù hợp rất tốt của kết quả số đạt được khi so sánh với các phương pháp khác chứng minh hiệu quả tính toán của phương pháp hiện tại. Khi so sánh với lời giải của Tran và cộng sự (2014) sử dụng phương pháp PTHH với cùng kiểu chia lưới ta có thể thấy lời giải của ES-FEM cho kết quả tốt hơn. Trong bài toán này, ta cũng thấy được ứng với trường hợp tải trọng (a), mode phá hoại là dạng phá hoại do biến dạng dẻo tăng dần; còn với ứng trường hợp tải trọng

(b) và (c) dạng phá hoại là do biến đổi chiều lặp lại. Việc xác định được mode phá hoại giúp cho việc đánh giá ứng xử của kết cấu được cải thiện đáng kể.

## Bảng 2

Hệ số tải trọng thích nghi của bài toán dầm với các miền tải trọng khác nhau

Phương pháp	Miền tải trọng		
	(a) $1.2 \leq p_1 \leq 2.0$ $0 \leq p_2 \leq 1.0$	(b) $0 \leq p_1 \leq 2.0$ $0.6 \leq p_2 \leq 1.0$	(c) $0 \leq p_1 \leq 2.0$ $0 \leq p_2 \leq 1.0$
Garcea và cộng sự (2005)	3.244	-	-
Chen và cộng sự (2008)	3.297	2.174	2.152
Nguyen-Xuan và cộng sự (2012), NS-FEM Dual	3.259	2.036	2.016
FEM-Reduced SOCP	3.909	2.591	2.563
<i>ES-FEM Reduced SOCP</i>			
<i>Alternating collapse</i>	5.452	2.259	2.236
<i>Incremental collapse</i>	3.498	3.531	3.504

## 5. Kết luận

Quy trình tính toán thích nghi của kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn trơn cạnh (ES-FEM) kết hợp tối ưu nón bậc 2 đã được xây dựng. Nghiên cứu cho thấy phương pháp đề xuất cho kết quả tốt hơn so với phương pháp phần tử hữu hạn do ma trận độ cứng được mềm hóa. Ngoài ra, trong phương pháp này, mặc dù tính chính xác tăng lên nhưng số biến của bài toán tối ưu không tăng nhiều, đảm bảo tính hiệu quả về chi phí tính toán. Một vấn đề khác là, dựa trên công thức động học giản yếu ta có thể xác định được dạng phá hoại của kết cấu, từ đó giúp cho việc đánh giá ứng xử của kết cấu được cải thiện đáng kể.

## Tài liệu tham khảo

- Anderheggen, E., & Knöpfel, H. (1972). Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids Structures*, 8(12), 1413-1431.
- Andersen, K. D., Christiansen, E., Conn, A. R., & Overton, M. L. (2000). An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1), 243-262.
- Belytschko, T. (1972). Plane stress shakedown analysis by finite elements. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14(9), 619-625.
- Chen, S., Liu, Y., & Cen, Z. (2008). Lower-bound limit analysis by using the EFG method and non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(3), 391-415. doi:10.1002/nme.2177
- Garcea, G., Armentano, G., Petrolo, S., & Casciaro, R. (2005). Finite element shakedown analysis of two-dimensional structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(8), 1174-1202.

- Groß-Weege, J. (1997). On the numerical assessment of the safety factor of elastic-plastic structures under variable loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(4), 417-433.
- Ho, P. L. H., & Le, C. V. (2020). A stabilized iRBF mesh-free method for quasi-lower bound shakedown analysis of structures. *Computers & Structures*, 228, Article 106157. doi:10.1016/j.compstruc.2019.106157
- Koiter, W. T. (1960). General theorems for elastic-plastic solids. In I. N. Sneddon & R. Hill (Eds.), *Progress in solids mechanics* (pp. 167-221).
- König, A. (1987). *Shakedown of elastic-plastic structures*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier.
- Le, C. V. (2017). Estimation of bearing capacity factors of cohesive-frictional soil using the cell-based smoothed finite element method. *Computers Geotechnics*, 83, 178-183.
- Liu, G., Chen, L., Nguyen, T. T., Zeng, K., & Zhang, G. (2010). A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of fracture problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(11), 1466-1497.
- Liu, G., Dai, K., & Nguyen, T. T. (2007). A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*, 39(6), 859-877.
- Liu, G., Nguyen, T. T., & Lam, K. (2009). An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free, and forced vibration analyses of solids. *Journal of Sound Vibration*, 320(4/5), 1100-1130
- Liu, G., Nguyen, T., Dai, K., & Lam, K. (2007). Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(8), 902-930.
- Nguyen, H. X., Rabczuk, T., Nguyen, T. T., Tran, T. N., & Nguyen, N. T. (2012). Computation of limit and shakedown loads using a node-based smoothed finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(3), 287-310. doi:10.1002/nme.3317
- Pham, D. C. (1992). Extended shakedown theorems for elastic-plastic bodies under quasi-periodic dynamic loading. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical Physical Sciences*, 439(1907), 649-658.
- Pham, D. C. (2003). Shakedown theory for elastic-perfectly plastic bodies revisited. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(6), 1011-1027. doi:10.1016/j.ijmecsci.2003.09.006
- Pham, D., & Stumpf, H. (1994). Kinematical approach to the shakedown analysis of some structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 52(4), 707-719.
- Sloan, S. (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical Analytical Methods in Geomechanics*, 12(1), 61-77.
- Tran, T. D., Le, C. V., Pham, D. C., & Nguyen, H. X. (2014). Shakedown reduced kinematic formulation, separated collapse modes, and numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 51(15), 2893-2899. doi:10.1016/j.ijsolstr.2014.04.016
- Tran, T. N., Liu, G. R., Nguyen, H. X., & Nguyen, T. T. (2010). An edge-based smoothed finite element method for primal-dual shakedown analysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(7), 917-938. doi:10.1002/nme.2804

